Komplexe Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen keine Lösung. Definieren wir dennoch

$$i = \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad i^3 = -i \quad \rightarrow \quad i^4 = 1\,, \tag{1}$$

so ist i deswegen sicherlich keine reelle Zahl. Man nennt daher i die "imaginäre Einheit". Die Zahlen 1 (reell) und i (imaginär) spannen einen zweidimensionalen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen auf: Durch Linearkombinationen wie

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

lassen sich Zahlen darstellen, die sowohl einen Realteil (hier $\mathfrak{Re}\,\{z\} = x$) als auch einen Imaginärteil (hier $\mathfrak{Im}\,\{z\} = y$) haben. Die Menge aller dieser Zahlen nennt man die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil nennt man "rein reell", solche mit verschwindendem Realteil "rein imaginär". Sind sowohl Real- als auch Imaginärteil von Null verschieden, spricht man von "echt komplexen" Zahlen.

Die Addition im Vektorraum $\mathbb{C}$ erfolgt wie gewohnt "komponentenweise", d. h. für Real- und Imaginärteil jeweils getrennt. Die Summe zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ist demnach

$$z_1 = x_1 + iy_1\,, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad \rightarrow \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,. \tag{2}$$

"Skalare" Multiplikation in diesem Vektorraum, d. h. die Bildung des Produktes einer reellen mit einer komplexen Zahl erfolgt natürlich gemäß

$$\alpha, x, y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot (x + iy) = \alpha x + i(\alpha y)\,. \tag{3}$$

Darüberhinaus legt Gl. (1) ja schon nahe, dass man auch komplexe Zahlen miteinander multiplizieren kann. Das ergibt sich zwingend:

$$\begin{aligned}
z_1 = x_1 + iy_1\,, \quad z_2 &= x_2 + iy_2 && (4)\\
\rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) && (5)
\end{aligned}$$

Bezüglich der Addition (mit neutralem Element $0 := 0 + i \cdot 0$ und mit zu beliebigem $z = x+iy$ inversem Element $-z := -x+i(-y)$ bilden die komplexen Zahlen gemäß Gl. (2) eine kommutative Gruppe, ebenso wie bezüglich der Multiplikation gemäß Gl. (5). Bei der Multiplikation ist das neutrale

Element $1 := 1 + i \cdot 0$, und zu gegebenen z lautet das inverse Element (die Null hat natürlich keins):

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad z^{-1} := \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{\|z\|^2} \tag{6}$$

mit der zu z *komplex konjugierten* Zahl

$$z^* = \mathfrak{Re}\{z\} - i \cdot \mathfrak{Im}\{z\}$$

und dem Betrag

$$\|z\| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(\mathfrak{Re}\{z\})^2 + (\mathfrak{Im}\{z\})^2}\,. \tag{7}$$

Wie man anhand der Form von z^{-1} in Gl. (6) leicht nachvollzieht, können auch bei Bildung von Brüchen die aus dem Reellen gewohnten Rechenregeln angewendet werden:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1} \overset{(6)}{=} \frac{z_1 z_2^*}{\|z_2\|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{8}$$

Durch die formale Erweiterung (hier mit z_2^*) wird der Nenner also reell, was nützlich bei der Berechnung von Real- und Imaginärteil eines Bruches ist.

Mit Hilfe der bisher abgeleiteten Ausdrücke zeigt man leicht, dass gilt:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*\,, \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*\,, \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}\,. \tag{9}$$

Mathmatisch gesehen ist $\mathbb{C}$ ein normierbarer Vektorraum über $\mathbb{R}$ und der in Gl. (7) gegebene Ausdruck nur eine Möglichkeit von vielen, eine Norm in diesem Vektorraum einzuführen. Der Begriff "Betrag" wird im strengen mathematischen Sinne nur für $\mathbb{R}$ benutzt. Es hat sich aber eingebürgert, die Norm in Gl. (7) auch als Betrag zu bezeichnen und oft auch die Doppelstriche durch einfache Betragstriche zu ersetzen (analog zur euklidischen Norm im $\mathbb{R}^n$).

Auf $\mathbb{C}$ sind, wie oben beschrieben, Addition und Multiplikation definiert, und $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ bildet mit beiden Operationen Abelsche Gruppen. Die Distributivgesetze sind, wie man leicht selbst überprüft, auch erfüllt, somit ist $\mathbb{C}$ ein Körper. Ein wichtiger Unterschied zu den reellen Zahlen ist, dass $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann, das bedeutet, dass Aussagen wie

$$x_1 < x_2 \quad \text{mit} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

für zwei komplexe Zahlen nicht getroffen werden können (wohl aber für die Beträge komplexer Zahlen, denn diese sind per definitionem reelle Zahlen).

Die Ähnlichkeit von $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ legt es nahe, komplexe Zahlen in der sogenannten "Gaußschen Zahlenebene" darzustellen. Dazu trägt man den Realteil entlang der x-Achse und den Imaginärteil entlang der y-Achse auf. Der Betrag einer komplexen Zahl wird nach Gl. (7) wie die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ gebildet. Wenn man den Winkel des die komplexe Zahl $z = x + iy$ repräsentierenden Ortsvektors in der Zahlenebene bezüglich der x-Achse mit $\arg(z)$ bezeichnet (Sprechweise: "Argument von z"), so ergibt sich die Polardarstellung

$$z = x + iy = |z| \cdot \{\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))\} \ . \tag{10}$$

Die hiermit definierte Funktion $\arg(z)$ ordnet jeder komplexen Zahl z (außer der Null) auf eindeutige Weise[1] eine reelle Zahl zu.

Es gilt dann

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\mathfrak{Im}\{z\}}{\mathfrak{Re}\{z\}} \ .$$

Man beachte, dass aufgrund der Uneindeutigkeit des Tangens[2] hierbei nicht eindeutig nach $\arg(z)$ aufgelöst werden kann und dafür die Vorzeichen von $\mathfrak{Re}\{z\}$ und $\mathfrak{Im}\{z\}$ beachtet werden müssen.

Durch die Definition von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ sind ähnlich wie auf $\mathbb{R}$ weitere Funktionen definierbar: Polynome, rationale und insbesondere auch transzendente Funktionen, welche über Potenzreihen eingeführt werden. Zur Erinnerung: Im Reellen sind

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots \tag{11}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \tag{12}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \tag{13}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \ . \tag{14}$$

Daraus lassen sich weitere Funktionen ableiten, insbesondere die Umkehrfunktionen log, arcosh, arsinh und artanh. Außerdem gelten im Reellen die Reihendarstellungen

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots \tag{15}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots \tag{16}$$

[1] bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π. Diese Ambivalenz lässt sich aber durch die Vereinbarung $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ unterdrücken.

[2] Der Tangens ist "nur" π-periodisch, $\arg(z)$ dagegen 2π-periodisch.

Diese Definitionen lassen sich problemlos ins Komplexe übertragen. Besonders interessant ist die Exponentialfunktion mit rein imaginärem Argument:

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{24} + \frac{(ix)^5}{120} + \dots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + i\frac{x^5}{120} \pm \dots \\
&= \left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots\right\} + i \cdot \left\{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots\right\} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Die letzte Umformumg[3] ergibt bei Vergleich mit den Gln. (16) und (17) die berühmte *Eulersche Identität*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,. \qquad (18)$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die Kosinus- und die Sinusfunktion in Analogie zu den hyperbolischen Funktionen – siehe Gln. (12) und (13) – elegant definieren:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad (19)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\,. \qquad (20)$$

Über den Umweg durchs Komplexe lassen sich somit alle "gängigen" transzendenten Funktionen auf die Exponentialfunktion zurückführen, die man deswegen salopp auch als "Mutter aller Funktionen" bezeichnen könnte.

Es sei darauf hingewiesen, dass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$|e^{ix}| = 1\,. \qquad (21)$$

Somit liegen alle Zahlen der Form e^{ix} auf dem Einheitskreis der Zahlenebene. Ferner gilt für jede beliebige Zahl $z = x + iy$

$$(e^z)^* = \left(e^{x+iy}\right)^* = \left(e^x e^{iy}\right)^* = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{(z^*)}\,. \qquad (22)$$

Bei der Exponentialfunktion kann man also "den Stern unter die Funktion zeihen". Genaugenommen gilt das wegen Gl. (9) für alle Polynome und für

[3] Diese sogenannte totale Umordnung der Potenzreihe ist erlaubt, weil die Potenzreihe absolut konvergent ist, d. h. auch die Summe über die Beträge der Reihenglieder konvergiert.

alle als Potenzreihe darstellbaren Funktionen und für alle rationalen Ausdrücke, die aus solchen Funktionen zusammengesetzt sind[4]. Beispielsweise ist also

$$\left(\frac{z^2 e^{sin(z)} + \tan(z)}{\cos(\mathrm{Log}(z)) + z}\right)^* = \frac{(z^*)^2 e^{\sin(z^*)} + \tan(z^*)}{\cos(\mathrm{Log}(z^*)) + z^*} .$$

Die allgemeine Potenz zweier komplexer Zahlen z und α wird analog zum Reellen definiert:

$$z^\alpha = e^{\alpha \cdot \mathrm{Log}(z)} , \tag{23}$$

wobei Log die "Umkehrfunktion" zur komplexen Exponentialfunktion ist:

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(|z| \cdot e^{i \arg(z)}) = \log(|z|) + i \arg(z) . \tag{24}$$

Hier ist allerdings Vorsicht geboten! Auf Grund der Uneindeutigkeit von $\arg(z)$ ist auch $\mathrm{Log}(z)$ nicht eindeutig; In Gl. (24) ist der Hauptwert des Logarithmus gemeint, d. h. mit einem Imaginärteil $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

Eine damit verwandte Uneindeutigkeit zeigt sich beim Wurzelziehen im Komplexen, hier ein Beispiel:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1. \quad \textbf{(falsch!)} \tag{25}$$

Dieses widersprüchliche Beispiel findet man z. B. auf der entsprechenden Wikipedia-Seite. Dort steht allerdings statt des dritten Gleichheitszeichens ein Ungleichheitszeichen, suggerierend, dass genau an dieser Stelle der "Hase im Pfeffer" liegt. Genaugenommen ist (im Komplexen!) in Gl. (25) aber nur das letzte Gleichheitszeichen gesichert, alle anderen sind ambivalent, weil $\sqrt{z}$ immer zwei Zahlen meinen kann. Das ist übrigens im Reellen nicht anders, allerdings hat man dort verabredet, dass $\sqrt{x}$ diejenige *positive* Zahl ist, die quadriert x ergibt. Im Komplexen ist es noch schwieriger: So kommen für $\sqrt[n]{z}$ stets n Zahlen in Betracht, die alle äquidistant auf einem Kreis um den Ursprung der Zahlenebene verteilt liegen. (Die Argumente "benachbarter Wurzeln" unterscheiden sich gerade um $2\pi/n$.) Um hier Ordnung zu schaffen, kann man verabreden, dass man mit $\sqrt[n]{z}$ diejenige n-te Wurzel aus z meint, die das kleinste nicht-negative Argument besitzt. Dann erkennt man aber, dass man die aus dem reellen gewohnte Rechenregel

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c$$

nicht mehr bedenkenlos anwenden kann. Und dann lässt sich der Fehler in Gl. (25) tatsächlich am dritten Gleichheitszeichen festmachen.

Durch Verwendung der komplexen Exponentialfunktion vereinfacht sich auch die Polardarstellung in Gl. (10) zu

$$z = |z| e^{i \arg(z)} . \tag{26}$$

[4]Hierbei dürfen allerdings nur reelle Vorfaktoren und Koeffizienten auftauchen! Beispiel: Mit $f(z) = 2z^2$ und $g(z) = 2iz^2$ folgt zwar $f^*(z) = f(z^*)$, aber $g^*(z) \neq g(z^*)$.

Die Multiplikation zweier Zahlen in Polardarstellung ist dann

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg(z_1)+\arg(z_2))} . \tag{27}$$

Bei der Bildung des Produktes (des Quotienten) multipliziert (dividiert) man also die Beträge, während man die Argumente, d. h. die Polarwinkel in der Zahlenebene, addiert (subtrahiert).

Ein Polynom n-ten Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen stets n Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ (man spricht bei den Nullstellen auch von den n Wurzeln des Polynoms). Natürlich können mehrere Nullstellen auch zusammenfallen, aber im Komplexen ist stets eine vollständige Faktorisierung eines Polynoms

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = (z - \zeta_1) \cdot (z - \zeta_2) \cdot \ldots \cdot (z - \zeta_n)$$

möglich. So hat das Polynom $y = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ im Reellen nur eine Wurzel $\zeta_1 = 1$, die anderen beiden sind komplex ($\zeta_{2,3} = 1 \pm i$).

Zur Beschreibung "wirklicher" Größen, also physikalischer Observabler, müssen reelle Größen verwendet werden. (Was soll man sich schon unter $1 + 3i$ Metern vorstellen?) Trotzdem ist es oft sinnvoll, zunächst einen komplexen Ansatz zu machen, dessen Realteil (oder aber auch Imaginärteil) mit demjenigen Ansatz übereinstimmt, den man im Reellen machen würde, also etwa e^{ikx} statt $\cos(kx)$. Die Rechnung kann im Komplexen oft leichter durchgeführt werden als im Reellen. Am Ende reicht es dann, nur den Realteil (bzw. nur den Imaginärteil) des Ergenisses zu betrachten , der dann die physikalische Lösung repräsentiert.